ECOLE POLYTECHNIQUE **DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES** **(4 heures)**

CONCOURS D'ADMISSION 1988

OPTION P'

Dans tout le problème, $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle ouvert fixé J de $\mathbb{R}$, et indéfiniment dérivables sur J. On dit que $x_0 \in J$ est un zéro de $f \in \mathcal{E}$ d'ordre au moins $n \geqslant 1$ si f et toutes ses dérivées d'ordre strictement inférieur à n s'annulent en x_0 ; si de plus $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ le zéro x_0 est dit d'ordre n ; si toutes les dérivées de f s'annulent en x_0, on dit que x_0 est un zéro d'ordre $+\infty$.

On fixe d'autre part un intervalle non ponctuel $I \subset J$; I peut être ouvert, ou fermé, ou ni l'un ni l'autre. Si, dans I, f a un nombre fini de zéros $x_1,\ldots, x_s$ d'ordres tous finis $n_1,\ldots, n_s$, on pose $Z(f) = n_1 + \ldots + n_s$. Si f ne s'annule pas dans I, on pose $Z(f) = 0$, et si f a une infinité de zéros dans I ou un zéro d'ordre $+\infty$ dans I, on pose $Z(f) = +\infty$.

I

1. a. Montrer que pour que $x_0 \in J$ soit un zéro d'ordre au moins n de f il faut et il suffit qu'il existe une fonction g_n numérique continue sur J telle que, pour tout $x \in J$,

$f(x) = (x - x_0)^n g_n(x)$ et que x_0 est un zéro d'ordre n si et seulement si $g_n(x_0) \neq 0$.

b. Montrer que si x_0 est d'ordre fini il existe un intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset J$ dans lequel f n'admet pas d'autre zéro que x_0 et donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{E}$ non constamment nulle dans J montrant que la propriété précédente est inexacte si x_0 est d'ordre $+\infty$.

c. Si x_0 est un zéro d'ordre au moins n de f, montrer que, pour tout $x \in J$, avec les notations de I. 1. a., $g_1(x) = \int_0^1 f'(x + t(x_0 - x))dt$ et que $g_n \in \mathcal{E}$.

2. Dans cette question, on suppose que $I = [a, b] \subset J$.

a. Si $f \in \mathcal{E}$ n'a dans I que des zéros d'ordre fini, $Z(f)$ peut-il être infini ?

b. Si $Z(f)$ est fini, avec $f(a)f(b) \neq 0$, montrer que la parité de $Z(f)$ ne dépend que du signe de $f(a)f(b)$.

c. Si $Z(f)$ est fini, montrer que $Z(f') \geqslant Z(f) - 1$ et donner un exemple pour lequel $Z(f') = Z(f) - 1$. Si de plus $f(a)f'(a) > 0$ ou $f(b)f'(b) < 0$, montrer que $Z(f') \geqslant Z(f)$.

d. Si $Z(f) = +\infty$, montrer que $Z(f') = +\infty$. La réciproque est-elle exacte ?

3. Soit $J =]-\rho, \rho[$ où $\rho > 0$ est le rayon de convergence, fini ou non, d'une série entière dont f est la somme sur J ; on suppose les coefficients de cette série tous réels et, à partir d'un indice n_0, tous positifs ou nuls. Montrer que, pour $I = [0, \rho[$, $Z(f)$ est fini.

4. Soient $f \in \mathcal{E}$, $u \in \mathcal{E}$ et I tel que $Z(u) = 0$. Comparer $Z(uf)$ à $Z(f)$.

5. Soit φ une fonction numérique définie et indéfiniment dérivable sur un intervalle $J_1 \subset \mathbb{R}$; on suppose que φ' ne s'annule pas et que l'image de J_1 par φ contient J. Pour $f \in \mathcal{E}$ et I fixés, montrer que l'image réciproque de I par φ est un intervalle I' et comparer $Z(f)$ relatif à I avec $Z(f \circ \varphi)$ relatif à I'.

II

Dans toute la suite du problème, on considère des suites finies $a = (a_0,\ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 1)$ de nombres réels non tous nuls, et on note $N(a)$ le nombre des changements de signe dans a en ne tenant pas compte des éléments nuls de a ; autrement dit, $N(a)$ est le nombre des indices $j \in [1, n]$ pour lesquels il existe un indice $i \in [0, j[$ tel que $a_i a_j < 0$ avec $a_{i+1} = \ldots = a_{j-1} = 0$.

1. Soient I = J = ℝ, avec les notations du début du problème, et $f \in \mathcal{E}$ définie par $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i e^{-\lambda_i x}$, où les a_i sont des réels non tous nuls et les λ_i des réels *tous différents* rangés dans l'ordre $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. La suite $a = (a_0, \ldots, a_n)$ et la suite $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ s'appellent respectivement suite de coefficients et suite d'exposants de f.

a. Montrer que toute autre suite de coefficients de f (associée à une autre suite d'exposants) ne diffère de la suite a que par des termes nuls ; en déduire que $N(a)$ ne dépend que de f.

b. On suppose dans cette question que $N(a) \geqslant 1$, que les a_i sont tous non nuls, et on choisit un indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{i-1}a_i < 0$, et un réel $\mu \in]\lambda_{i-1}, \lambda_i[$. Calculer en fonction de $N(a)$ la valeur de $N(b)$ pour une suite b de coefficients de g définie par $g(x) = e^{-\mu x}(e^{\mu x} f(x))'$ et comparer $Z(g)$ à $Z(f)$.

c. Montrer que $Z(f)$ est fini et que $N(a) - Z(f)$ est positif et pair.

2. Soit $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polynôme à coefficients réels de degré $n \geqslant 1$, $Z_1(f)$ le nombre des racines strictement positives de f, $Z_2(f)$ celui de ses racines strictement négatives, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité. En posant $a = (a_0, \ldots, a_n)$ montrer que $N(a) - Z_1(f)$ est positif et pair. En utilisant la suite $a' = ((-1)^i a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, établir un résultat analogue liant $N(a')$ et $Z_2(f)$.

3. On considère la fonction F définie sur I = J = ℝ par $F(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^x$ où les C_n^k sont les coefficients du binôme.

a. Majorer $Z(F)$.

b. On définit par récurrence les polynômes f_j par $f_0(x) = (x-1)^n$ et $f_{j+1}(x) = x\frac{d}{dx} f_j(x)$. Comparer $F(j)$ à $f_j(1)$ et en déduire la liste des zéros de F avec leurs ordres respectifs.

4. On considère d'une part une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, strictement croissante et tendant vers $+\infty$, et d'autre part une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels non tous nuls et, à partir d'un certain rang n_0, tous de même signe. On note $N(a)$ le nombre de changements de signe de la suite finie $(a_0, \ldots, a_{n_0})$, avec $N(a) = 0$ si $n_0 = 0$.

a. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que la série de terme général $a_n e^{-\lambda_n x}$ converge si $x > \alpha$ et diverge si $x < \alpha$.

b. Donner trois exemples pour lesquels respectivement $\alpha = -\infty$, $\alpha = +\infty$, $\alpha = 0$.

c. Pour $\alpha < +\infty$, on note F la fonction définie sur I = $]\alpha, +\infty[$ par la somme de la série et on appelle α abscisse de convergence de F. Montrer que F est indéfiniment dérivable sur I et que sa dérivée F' est la somme d'une série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{-\lambda_n x}$ de même abscisse de convergence α que F.

d. Montrer que $Z(F) \leqslant N(a)$.

5. Les hypothèses et les notations relatives à la suite a étant les mêmes qu'en II.4, on note ρ le rayon de convergence, supposé non nul, de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on considère le nombre $Z(f)$ pour la somme f de la série et l'intervalle I = $]0, \rho[$.

a. Etablir l'inégalité $Z(f) \leqslant N(a)$.

b. Montrer par un exemple que $N(a) - Z(f)$ peut être impair.

On considère une suite finie $h_0,\ldots, h_n$ de fonctions à valeurs réelles définies et indéfiniment dérivables sur un même intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

D'autre part, étant données p fonctions $f_1,\ldots, f_p$ à valeurs réelles, indéfiniment dérivables sur I, on note $W(f_1,\ldots, f_p)$ le déterminant des $f_j^{(k)}$ ($j = 1,\ldots, p$; $k = 0,\ldots, p-1$) où $f_j^{(k)}$ désigne la $k^{\text{ème}}$ dérivée de f_j si $k \geqslant 1$ et f_j elle-même si $k = 0$.

1. Montrer que l'égalité $W(h_{n_1},\ldots, h_{n_p})(x_0) = 0$ équivaut à l'existence d'une suite finie $a \in \mathbb{R}^p$ de réels a_j non tous nuls tels que la fonction $\sum_{j=1}^{p} a_j h_{n_j}$ ait en $x_0 \in I$ un zéro d'ordre au moins p.

2. On suppose dans cette question que la suite $h_0,\ldots, h_n$ a la propriété suivante

P_n : pour tout a non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$, la fonction $h = \sum_{i=0}^{n} a_i h_i$ vérifie sur I l'inégalité $Z(h) \leqslant N(a)$.

a. Montrer que pour tout $x \in I$ et toute suite $n_1,\ldots, n_p$ d'entiers tels que $0 \leqslant n_1 < \ldots < n_p \leqslant n$, $W(h_{n_1},\ldots, h_{n_p})(x)$ est non nul et de signe constant ; on désignera ce signe par $\varepsilon(n_1,\ldots, n_p)$.

b. Soit x_0 fixé dans I. Montrer qu'il existe une suite $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique telle que $h = \sum_{i=0}^{n} a_i h_i$ vérifie les conditions $h(x_0) = h'(x_0) = \ldots = h^{(n-1)}(x_0) = 0$ et $h^{(n)}(x_0) = 1$.

Calculer les a_i et le signe de $a_0 a_i$ et en déduire que le signe $\varepsilon(0,\ldots, i-1, i+1,\ldots, n)$ est indépendant de $i = 1,\ldots, n-1$ et égal aussi à $\varepsilon(1,\ldots,n)$ et à $\varepsilon(0,\ldots,n-1)$.

c. Montrer que la suite $h_0,\ldots,h_n$ vérifie la propriété suivante

Q_n : $W(h_{n_1},\ldots, h_{n_p})$ est non nul sur I, et, pour p fixé au plus égal à $n+1$, de signe constant indépendant de la suite $n_1,\ldots,n_p$, supposée strictement croissante.

d. Comment se traduit la propriété Q_n pour $p = 1$ et pour $p = 2$?

3.a. En reprenant les notations du début de cette partie III, vérifier que si ψ est indéfiniment dérivable sur I,

$$W(\psi f_1,\ldots, \psi f_p) = \psi^p W(f_1,\ldots, f_p)$$

et que, si les f_j ne s'annulent pas sur I, on a, pour tout $j = 1,\ldots p$,

$$\frac{1}{f_j^p} W(f_1,\ldots, f_p) = (-1)^{j-1} W\left[\left(\frac{f_1}{f_j}\right)',\ldots, \left(\frac{f_{j-1}}{f_j}\right)', \left(\frac{f_{j+1}}{f_j}\right)',\ldots, \left(\frac{f_p}{f_j}\right)' \right]$$

avec, au second membre, suppression des termes à numérateur d'indice strictement inférieur à j si $j = 1$ et suppression des termes à numérateur d'indice strictement supérieur à j si $j = p$.

b. Soit i un entier appartenant à $[0, n]$. On pose

$$H_0 = -\left(\frac{h_0}{h_i}\right)',\ldots, H_{i-1} = -\left(\frac{h_{i-1}}{h_i}\right)', H_i = \left(\frac{h_{i+1}}{h_i}\right)',\ldots, H_{n-1} = \left(\frac{h_n}{h_i}\right)'$$

avec une convention analogue à celle des indices j de III.3.a si $i = 0$ ou si $i = n$. Montrer que si la suite $h_0,\ldots, h_n$ a la propriété Q_n, la suite $H_0,\ldots, H_{n-1}$ a la propriété Q_{n-1}.

c. En déduire que les propriétés P_n et Q_n sont équivalentes.

d. Donner un exemple de suite $h_0,\ldots,h_n$ vérifiant ces deux propriétés équivalentes.

♦ ♦
♦

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail